

函数零点问题基本解题策略

■ 北京市第十二中学 高慧明

函数零点问题在考查题型上,通常以选择题或填空题的形式出现,一般综合性较强,难度较大.

解题中特别注意函数零点、方程的根、函数图像交点的相互转化:有关零点个数及性质的问题会用到这三者的转化,且这三者各具特点:

(1) 函数的零点:有“零点存在性定理”作为理论基础,可通过区间端点值的符号和函数的单调性确定是否存在零点;

(2) 方程的根:方程的特点在于能够进行灵活的变形,从而可将等号两边的表达式分别构造为两个可分析的函数,为作图做好铺垫;

(3) 函数图像的交点:通过作图可直观地观察到交点的个数,并能初步判断交点所在区间.

三者转化:函数 $f(x)$ 的零点 $\Rightarrow$ 方程 $f(x)=0$ 的根 $\xrightarrow{\text{方程变形}}$ 方程 $g(x)=h(x)$ 的根 $\Rightarrow$ 函数 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的交点.

方法技巧:

1. 已知函数有零点求参数取值范围常用的方法:

(1) 直接法:直接根据题设条件构建关于参数的不等式,再通过解不等式确定参数范围;

(2) 分离参数法:先将参数分离,转化成求函数值域问题加以解决;

(3) 数形结合法:先对解析式变形,在同一平面直角坐标系中,画出函数的图像,然后数形结合求解.

2. 此类问题的处理步骤:

(1) 作图:可将零点问题转化成方程,进而通过构造函数将方程转化为两个图像交点问题,并作出函数图像;

(2) 确定变量范围:通过图像与交点位置确定参数和零点的取值范围;

(3) 观察交点的特点(比如对称性等)并选择合适的方法处理表达式的值.

答题注意:

对函数零点存在的判断需要注意以下两点:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续; (2) 满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$.

上述方法只能求变号零点,对于非变号零点不能用上述方法求解.

另外需要注意的是:

(1) 若函数 $f(x)$ 的图像在 $x=x_0$ 与 x 轴相切,则零点 x_0 通常称为不变号零点;

(2) 函数的零点不是点,它是函数 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点

的横坐标,是方程 $f(x)=0$ 的根.

应用举例:

1. 函数零点所在区间的判断

【例 1】函数 $f(x)=\ln x - \frac{2}{x^2}$ 的零点所在的区间为 ()

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (2, 3)

D. (3, 4)

【解析】由题干知道原函数是增函数,故可以根据零点存在定理得到:

$$f(1) < 0, f(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \ln \sqrt{e} > 0,$$

故两点存在于 (1, 2) 上, 故选 B.

【例 2】已知函数 $f(x)=x-\sqrt{x}$ ($x>0$), $g(x)=x+e^x$, $h(x)=x+\ln x$ 的零点分别为 x_1, x_2, x_3 , 则 ()

A. $x_1 < x_2 < x_3$ B. $x_2 < x_1 < x_3$ C. $x_2 < x_3 < x_1$ D. $x_3 < x_1 < x_2$

【解析】根据函数 $y=x$ 分别与 $y=\sqrt{x}$, $y=-e^x$, $y=-\ln x$ 图像交点, 可知选 C.

2. 由函数零点的存在情况求参数的值或取值范围

【例 3】已知 x_1 是函数 $f(x)=x+1-\ln(x+2)$ 的零点, x_2 是函数 $g(x)=x^2-2ax+4a+4$ 的零点, 且满足 $|x_1-x_2| \leq 1$, 则实数 a 的最小值是 ()

A. -1 B. -2 C. $2-2\sqrt{2}$ D. $1-2\sqrt{2}$

【解析】因为 $f'(x)=1-\frac{1}{x+2}=\frac{x+1}{x+2}$, 所以函数在 $(-2, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增, 故 $f(x)_{\min}=f(-1)=0$, 故 $x=-1$ 为方程的根, 故 $x_1=-1$, 故 $|-1-x_2| \leq 1$, 解得 $-2 \leq x_2 \leq 0$, 所以 $g(x)=x^2-2ax+4a+4=0$ 在 $[-2, 0]$ 上有解, 即 $2a=\frac{x^2+4}{x-2}$ 在 $[-2, 0]$ 上有解, 令 $h(x)=\frac{x^2+4}{x-2}=x-2+\frac{8}{x-2}+4$, 可求得 $h(x)_{\min}=-2$, 所以 $2a \geq -2$, 解得 $a \geq -1$, 故选 A.

【点评】解题的关键是得到 $x_1=-1$ 后, 得到 $-2 \leq x_2 \leq 0$, 然后将问题转化成方程 $g(x)=x^2-2ax+4a+4=0$ 在 $[-2, 0]$ 上有解的

